

CBPF - CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

Rio de Janeiro

Notas de Física

CBPF-NF-018/08

August 2008

Relativeca Dopplera efiko êe unuforme akcelata movo – III

**Efeito Doppler relativista em um movimento
uniformemente acelerado – III**

F.M. Paiva & A.F.F. Teixeira

Relativeca Dopplera efiko ĉe unuforme akcelata movo – III

Efeito Doppler relativista em um movimento uniformemente acelerado – III

F.M. Paiva

Departamento de Física, U.E. Humaitá II, Colégio Pedro II
Rua Humaitá 80, 22261-040 Rio de Janeiro-RJ, Brasil; fmpaiva@cbpf.br

A.F.F. Teixeira

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas
22290-180 Rio de Janeiro-RJ, Brasil; teixeira@cbpf.br

7-a de aŭgusto, 2008

Resumo

Ĉe special-relativeco ni detale priskribas lum-Doppleran efikon inter restanta lum-fonto kaj observanto kun rektlinia movado kaj konstanta propra akcelo.

Na relatividade especial, nós descrevemos detalhadamente o efeito Doppler luminoso entre uma fonte em repouso e um observador com movimento retilíneo e aceleração própria constante.

1 Enkonduko

En antaŭaj artikoloj [6, 7, 8, 9] ni pridiskutis Doppleran efikon de lum-signaloj inter fonto kaj observanto. Tie aŭ ambaŭ moviĝas aŭ unu moviĝas dum la alia restas. Ofte estas komenca fazo, kiam moviĝanta observanto ricevas signalon eligitan kiam fonto ankoraŭ ne moviĝas. La Doppleran faktoron de tia fazo ni kalkulis en [9], kaj nun ni plu esploras ties grafikaĵojn.

Tia sistemo fariĝas kun observanto komence en loko $[x, y] = [0, 0]$, kaj lum-fonto en $[L, P]$, ambaŭ restantaj. Ĉi tie L estas aŭ pozitiva, aŭ nula aŭ malpozitiva, kaj tute-ĝenerale P estas aŭ pozitiva

1 Introdukção

Em artigos anteriores [6, 7, 8, 9] nós discorremos sobre o efeito Doppler de sinal de luz entre fonte e observador. Ali ou ambos se movem ou um se move enquanto o outro fica parado. Frequentemente há uma fase inicial, quando o observador em movimento recebe sinal emitido quando a fonte ainda não se move. Nós calculamos o fator Doppler de tal fase em [9], e agora nós continuamos a investigar os correspondentes gráficos.

Tal sistema se faz com o observador inicialmente no local $[x, y] = [0, 0]$, e com a fonte luminosa em $[L, P]$, ambos em repouso; aqui L é ou positivo, ou nulo, ou negativo, e sem restrição de generalidade P é ou positivo ou nulo, con-



Figuro 1: Komencaj lokoj de observanto kaj fonto.

Figura 1: Posições iniciais de observador e fonte.

aŭ nula, laŭ figuro 1. Ekde momento $t = 0$ la observanto moviĝas kun konstanta propra akcelo a , pozitive de akso x , dum la fonto plu restas. Rimarku, ke se $L > 0$, la observanto komence proksimiĝas al la fonto, kaj se $L < 0$ ĝi nur foriĝas de la fonto. Laŭ [9, ekvacio (23)], por $t > 0$ la Dopplera faktoro estas

forme la figura 1. A partir do momento $t = 0$ o observador se move com aceleração própria constante a positiva, sobre o eixo x , enquanto a fonte continua parada. Repare que se $L > 0$ o observador inicialmente se aproxima da fonte, e se $L < 0$ ele somente se afasta da fonte. Segundo [9, equação (23)], para $t > 0$ o fator Doppler é

$$D(\tau) = \cosh(a\tau/c) + \frac{[1 + l - \cosh(a\tau/c)] \sinh(a\tau/c)}{\sqrt{[1 + l - \cosh(a\tau/c)]^2 + p^2}}, \quad l := aL/c^2, \quad p := aP/c^2, \quad (1)$$

kie τ estas la propra tempo de observanto, elektante $\tau = 0$ kiam $t = 0$.

Sekve ni priskribas tri gravajn aferojn rilatajn al nia studo: tempan dilaton, propran akcelon, kaj Doppleran efikon.

onde τ é o tempo próprio do observador, escolhendo-se $\tau = 0$ quando $t = 0$.

A seguir nós descrevemos três importantes assuntos relacionados ao nosso estudo: dilatação temporal, aceleração própria, e efeito Doppler.

Tempa dilato

Estiĝu inercia referenca sistemo S , t.e., unu normohorloĝo fiksa en ĉiu spaca punkto, ĉiuj sinkronaj. La tempo t mezurata per tiu horloĝaro nomiĝas tempa koordinato. Plu estiĝu moviĝanta normohorloĝo \mathcal{H} , kaj τ ĝia propra tempo.

Supozu, ke kiam \mathcal{H} montras tempon τ_1 , ĝi trapasas horloĝon de S kiu montras tempon t_1 . Poste, kiam \mathcal{H} montras tempon τ_2 , ĝi trapasas alian horloĝon de S , kiu montras tempon t_2 . Laŭ special-relativeco la koordinata intertempo $t_2 - t_1$ mezurata per la horloĝaro de S estas pli granda ol la propra intertempo $\tau_2 - \tau_1$ mezurata per horloĝo \mathcal{H} . Se intertempoj $t_2 - t_1 =: dt$ kaj $\tau_2 - \tau_1 =: d\tau$ estas infimezimaj, do special-relativeco diras, ke $dt = \gamma d\tau$, kie

Dilatação temporal

Seja um sistema inercial de referência S , isto é, um relógio padrão fixado em cada ponto espacial, todos síncronos. O tempo t medido por essa coleção de relógios se chama coordenada temporal. Seja ademais um relógio padrão \mathcal{H} em movimento, e τ seu tempo próprio.

Suponha que, quando \mathcal{H} mostre tempo τ_1 , ele cruze com um relógio de S que mostre tempo t_1 . Posteriormente, quando \mathcal{H} mostre tempo τ_2 , ele cruze com outro relógio de S , que mostre tempo t_2 . Segundo a relatividade especial, o intervalo de coordenada temporal $t_2 - t_1$ medido pela coleção de relógios de S é maior que o intervalo de tempo próprio $\tau_2 - \tau_1$ medido pelo relógio \mathcal{H} . Se os intervalos de tempo $t_2 - t_1 =: dt$ e $\tau_2 - \tau_1 =: d\tau$ forem infinitesimais, então a relatividade especial diz que $dt = \gamma d\tau$, onde

$\gamma := 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$, estante v la rapido de \mathcal{H} . Ĉar ĉiam $\gamma \geq 1$, do ĉiam $dt \geq d\tau$, kaj tiu ebla malsameco nomiĝas tempa dilato.

Propra akcelo

Special-relativeco ne permesas, ke objekto havas konstantan Newtonan akcelon $a_N := d^2x/dt^2$ dum tro longa tempo. Fakte, tia objekto atingus rapidon $v := dx/dt$ pli granda ol vakuo-lumo-rapido c , kio ne estas ebla en tiu teorio.

Plej taŭgas al special-relativeco propra akcelo $a := \gamma^3 a_N$. Memoru, ke ju pli granda la rapido des pli granda la faktoro de tempa dilato γ , kaj kiam la rapido proksimiĝas al c , tiam γ emas al ∞ . Rezultas en ĉi tiu studo, ke konstanta propra akcelo a respondas al malkreskanta Newtona akcelo a_N kaj, ke la rapido de objekto kun konstanta propra akcelo dum tre longa tempo apenaŭ emas al vakuo-lum-rapido c .

Fizike, oni povas difini propran akcelon a de objekto kiel la Newtona akcelo mezurata en inercia referenca sistemo kun momente la sama rapido de objekto. Studoj de movado kun konstanta a estas oftaj, kiel ĉe Møller [1, paĝo 72], Rindler [2, paĝo 49], Dwayne Hamilton [3], Landau kaj Lifshitz [4, paĝo 22], Cochran [5], kaj ni mem [6, 7, 8, 9].

Dopplera efiko

En propra momento τ_f fonto eligas lum-signalon kun frekvenco ν_f , laŭ siaj propraj mezuriloj. En propra momento τ observanto ricevas tiun lum-signalon kun frekvenco ν , laŭ siaj propraj mezuriloj. Plej ofte $\nu \neq \nu_f$; ĉi tiu ŝanĝo de frekvenco nomiĝas Dopplera efiko, kaj la kvociento $D(\tau) := \nu/\nu_f$ nomiĝas Dopplera faktoro. Se $\nu > \nu_f$, la fenomeno nomiĝas al-violo ($D > 1$); kontraŭe nomiĝas al-ruĝo

$\gamma := 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$, sendo v la velocidade de \mathcal{H} . Como sempre $\gamma \geq 1$, então sempre $dt \geq d\tau$, e essa possível dissimelhança se chama dilatação temporal.

Aceleração própria

A relatividade especial não permite que um objeto tenha uma aceleração Newtoniana $a_N := d^2x/dt^2$ constante durante um tempo demasiado longo. De fato, tal objeto atingiria velocidade $v := dx/dt$ maior que a velocidade da luz no vácuo c , o que não é possível nessa teoria.

Para a relatividade especial a aceleração própria $a := \gamma^3 a_N$ é bem mais conveniente. Lembre-se que quanto maior for a velocidade maior será o fator de dilatação temporal γ , e que quando a velocidade se aproxima de c então γ se aproxima de ∞ . Resulta, neste estudo, que uma a constante corresponde a uma a_N decrescente, e que a velocidade de um objeto com aceleração própria constante durante um tempo muito longo apenas tende à velocidade da luz no vácuo c .

Fisicamente pode-se definir a aceleração própria a de um objeto como a aceleração Newtoniana medida em um sistema inercial de referência com momentaneamente a mesma velocidade que o objeto. Estudos de movimento com a constante são freqüentes, como em Møller [1, pág. 72], Rindler [2, pág. 49], Dwayne Hamilton [3], Landau e Lifshitz [4, pág. 22], Cochran [5], e nós mesmos [6, 7, 8, 9].

Efeito Doppler

No instante próprio τ_f uma fonte emite um sinal luminoso com freqüência ν_f , segundo seus próprios medidores. No instante próprio τ um observador recebe esse sinal luminoso com freqüência ν , segundo seus próprios medidores. O mais das vezes, $\nu \neq \nu_f$; esta mudança de freqüência se chama efeito Doppler, e o coeficiente $D(\tau) := \nu/\nu_f$ se chama fator Doppler. Se $\nu > \nu_f$, o fenômeno se chama violetamento ($D > 1$); caso contrário, chama-se avermelha-

($D < 1$).

Laŭ [7, 8, 9], la Doppleran faktoron oni povas kalkuli konsiderante du infinitezime sinsekvajn lum-signalojn. Estiĝu $d\tau_f$ la intertempo de eligo de tiuj du signaloj mezurita per la fonto, kaj estiĝu $d\tau$ la intertempo de ricevo de tiuj du signaloj mezurita per la observanto. Ekvivalente, estiĝu dt_f kaj dt la respondaj intertempoj, mezuritaj per iu inercia referenca sistemo. La Dopplera faktoro je la momento τ de ricevo de signalo estas

$$D(\tau) = \frac{d\tau_f}{d\tau} = \frac{\gamma(t)}{\gamma_f(t_f)} \frac{dt_f}{dt} . \quad (2)$$

La faktoro de tempa dilato $\gamma(t)$ pro movado de observanto kontribuas por alviolo, kaj, en la nomanto, la faktoro de tempa dilato $\gamma_f(t_f)$ pro movado de fonto kontribuas por alruĝo. La foriĝ-proksimiĝa faktoro dt_f/dt povas kontribui ambaŭmaniere: dum proksimiĝo ĝi estas pli granda ol 1, do kontribuas por alviolo, kaj dum foriĝo ĝi estas pli eta ol 1, do kontribuas por alruĝo. La Dopplera faktoro (2) estas rezulto de tiuj tri kontribuoj.

En nuna studo la fonto restas, do $\gamma_f(t_f) = 1$, kaj do $D(\tau) = \gamma(t) dt_f/dt$ havas nur du faktorojn. Tio simpligas la diskuton pri ekvacio (2) al la jenaj ĝeneralaĵoj. 1: ĉe proksimiĝo de observanto al fonto, la Dopplera efiko estas alviolo pro ambaŭ faktoroj. 2: ĉe preterpaso (pozicio $x = L$ de moviĝanta observanto en figuro 1, estante $P \neq 0$), $dt_f/dt = 1$ ne kontribuas, do $\gamma(t)$ faktoro estras farante alviolon. 3: ĉe foriĝo, aŭ la alruĝa faktoro dt_f/dt aŭ la alviola faktoro $\gamma(t)$ estras, farante plurajn interesajn eblecojn.

Sekcio 2 montras niajn plej gravajn rezultojn, t.e., studon de grafikaĵoj de Dopplera faktoro. Sekcio 3 montras iujn detalojn plu, kaj Sekcio 4 konkludas.

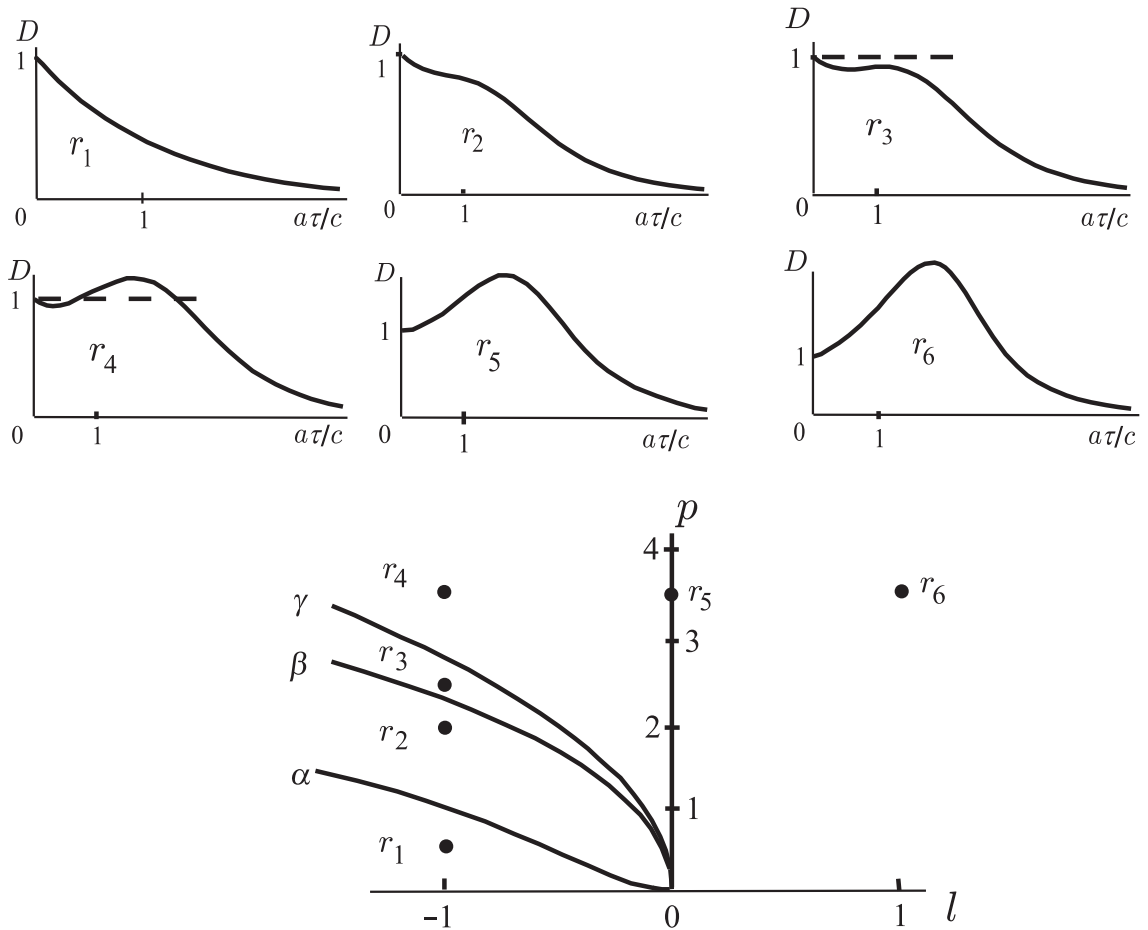
mento ($D < 1$).

Segundo [7, 8, 9], pode-se calcular o fator Doppler considerando dois sinais luminosos infinitesimalmente consecutivos. Seja $d\tau_f$ o intervalo de tempo entre a emissão desses dois sinais, medido pela fonte, e seja $d\tau$ o intervalo de tempo entre a recepção desses dois sinais, medido pelo observador. Equivalentemente, sejam dt_f e dt os intervalos de tempo correspondentes, medidos por um qualquer referencial inercial. O fator Doppler no momento τ do recebimento do sinal é

O fator $\gamma(t)$ devido ao movimento do observador contribui para violetamento, e, no denominador, o fator $\gamma_f(t_f)$ devido ao movimento da fonte contribui para avermelhamento. O fator de afastamento-aproximação dt_f/dt pode contribuir de ambos modos: durante uma aproximação ele é maior que 1, portanto contribui para violetamento, e durante um afastamento ele é menor que 1, portanto contribui para avermelhamento. O fator Doppler (2) é o resultado dessas três contribuições.

No presente estudo a fonte está parada, daí $\gamma_f(t_f) = 1$ e portanto $D(\tau) = \gamma(t) dt_f/dt$ tem apenas dois fatores. Isso simplifica a discussão sobre a equação (2) às seguintes generalidades. 1: na aproximação do observador à fonte, o efeito Doppler é de violetamento devido a ambos fatores. 2: na ultrapassagem (posição $x = L$ do observador em movimento na figura 1, sendo $P \neq 0$), $dt_f/dt = 1$ não contribui, portanto o fator $\gamma(t)$ comanda produzindo violetamento. 3: no afastamento, ou o fator avermelhador dt_f/dt ou o fator violetante $\gamma(t)$ comanda, produzindo várias possibilidades interessantes.

A Seção 2 mostra nossos resultados mais importantes, isto é, o estudo de gráficos de fator Doppler. A Seção 3 mostra alguns detalhes mais, e a Seção 4 conclui.



Figuro 2: Super estas 6 tipoj de grafikaĵo de Dopplera faktoro D kontraŭ $a\tau/c$, respondaj al ĉiu regiono de la malsupera diagramo. Tiu diagramo montras 6 regionojn, de r_1 ĝis r_6 , laŭ valoroj de $l = aL/c^2$ kaj $p = aP/c^2$, kaj montras kurbojn $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ kiuj limigas tiujn regionojn. Regiono r_5 estas akso $l = 0$. Nigraj buloj (\bullet) montras la valorojn de l kaj p rilatajn al ĉiu grafikaĵo.
 Figura 2: Na parte superior estão 6 tipos de gráfico de fator Doppler D contra $a\tau/c$, correspondentes a cada região do diagrama inferior. Esse diagrama mostra 6 regiões, de r_1 a r_6 , segundo os valores de $l = aL/c^2$ e $p = aP/c^2$, e mostra as curvas $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ que delimitam aquelas regiões. A região r_5 é o eixo $l = 0$. As bolas negras (\bullet) mostram os valores de l e p relacionados a cada gráfico.

2 Grafikaĵoj

Nun ni studas grafikaĵojn de Dopplera faktoro el ekvacio (1), montratajn en figuro 2. Ĉar en komenca momento $\tau = 0$ la observanto restas, tiam Dopplera efiko ne estas, $D(0) = 1$. Laste, kiam $\tau \rightarrow \infty$, certe okazas foriĝo, kaj la interspaco de observanto al fonto estas multe pligranda ol P . Do la foriĝo estas preskaŭ kolinia, kaj do la Dopplera efiko emas al plej forta alruĝo, t.e., la Dopplera faktoro estas $D(\infty) \rightarrow 0$.

La signaloj de $D'(0)$ kaj l estas la sama. Tio estas facile komprenebla. Ja, se $l > 0$ la movado estas komence proksimiĝo, do la Dopplera efiko estas alviolo, kaj se $l < 0$ la movado estas komence foriĝo kun malgranda rapido, do la Dopplera efiko estas alruĝo. Ankaŭ rimarku, ke $D''(0) > 0$, do la unua derivaĵo $D'(\tau)$ pliiĝas je $\tau = 0$.

Nun ni analizas ĉiun grafikaĵon en figuro 2. Estas ses ecoj de grafikaĵo, pendante de valoroj de l kaj p . En tiu figuro, malsupera diagramo $l \times p$ limigas ses regionojn, de r_1 ĝis r_6 , per kurboj $\{\alpha, \beta, \gamma\}$. Ĉiu regiono respondas al iu eco de grafikaĵo.

Grafikaĵoj de regiono r_1 estas la plej simplaj: ĉiam $D(\tau) \leq 1$, $D'(\tau) < 0$ kaj $D''(\tau) > 0$, do ili similas al $\exp(-a\tau/c)$. Vere, ili estas ĝuste $D(\tau) = \exp(-a\tau/c)$ se $p = 0$ kaj $l < 0$.

Kurbo α estas limo inter regionoj r_1 kaj r_2 , t.e., inter regiono de $D''(\tau)$ ĉiam pozitiva kaj regiono kie ĝi povas esti malpozitiva. Tiu kurbo malkovriĝas per forigo de τ el $D''(l, p, \tau) = 0$ kaj $D'''(l, p, \tau) = 0$. Oni montras, ke α havas horizontalan asimptoton, $p^2 = \frac{3}{2}(11\sqrt{33} - 59)$, t.e., $p \approx 2,51$.

Grafikaĵoj de r_2 malsamiĝas al tiuj de r_1 pro ĝibo. Tamen tiu ĝibo ne havas maksimumon, ĉar ĉiam $D'(\tau) \neq 0$. Tiu ĝibo okazas pro alviola kontribuo de γ faktoro. Vere, ĉar p estas pli granda kompare kun r_1 , komence la foriĝo estas malpli kolinia ol en r_1 , do alruĝa kontribuo de foriĝa faktoro

2 Gráficos

Vamos agora estudar os gráficos do fator Doppler a partir da equação (1), mostrados na figura 2. Como no momento inicial $\tau = 0$ o observador está parado, então não há efeito Doppler, $D(0) = 1$. E no final, quando $\tau \rightarrow \infty$, certamente ocorre afastamento, e a distância do observador à fonte é muito maior que P . Então o afastamento é quase colinear, e portanto o efeito Doppler tende ao mais forte avermelhamento, isto é, o fator Doppler é $D(\infty) \rightarrow 0$.

Os sinais de $D'(0)$ e l são o mesmo. Isso é facilmente compreensível. Com efeito, se $l > 0$ o movimento é inicialmente aproximação, portanto o efeito Doppler é violetamento, e se $l < 0$ o movimento é inicialmente afastamento com pequena velocidade, portanto o efeito Doppler é avermelhamento. Repare também que $D''(0) > 0$, portanto a primeira derivada $D'(\tau)$ cresce em $\tau = 0$.

Nós agora analisamos cada gráfico na figura 2. Há seis qualidades de gráfico, dependendo dos valores de l e p . Nessa figura, o diagrama inferior $l \times p$ delimita seis regiões, de r_1 a r_6 , mediante as curvas $\{\alpha, \beta, \gamma\}$. Cada região corresponde a algum tipo de gráfico.

Os gráficos da região r_1 são os mais simples: sempre $D(\tau) \leq 1$, $D'(\tau) < 0$ e $D''(\tau) > 0$, portanto eles se assemelham a $\exp(-a\tau/c)$. Em verdade, eles são precisamente $D(\tau) = \exp(-a\tau/c)$ se $p = 0$ e $l < 0$.

A curva α é o limite entre as regiões r_1 e r_2 , isto é, entre a região de $D''(\tau)$ sempre positiva e a região onde ela pode ser negativa. Essa curva se revela mediante a eliminação de τ das equações $D''(l, p, \tau) = 0$ e $D'''(l, p, \tau) = 0$. Mostra-se que α tem assíntota horizontal $p^2 = \frac{3}{2}(11\sqrt{33} - 59)$, isto é, $p \approx 2,51$.

Os gráficos de r_2 diferem dos de r_1 por causa de uma corcova. Entretanto essa corcova não tem um máximo, porque sempre $D'(\tau) \neq 0$. Essa corcova acontece por causa da contribuição violetante de γ . Com efeito, como p é maior comparativamente a r_1 , inicialmente o afastamento é menos colinear que em r_1 , daí a contribuição

estas malpli forta. Tamen, tiu kontribuo tuj superas tiun de alviola γ kiam la foriĝo fariĝas preskaŭ kolinia.

Kurbo β estas limo inter regionoj r_2 kaj r_3 , t.e., inter regiono de $D'(\tau)$ ĉiam malpozitiva kaj regiono kie ĝi povas esti pozitiva. Tiu kurbo malkovriĝas per forigo de τ el ekvacioj $D'(l,p,\tau) = 0$ kaj $D''(l,p,\tau) = 0$. Jen β :

$$l = \frac{1 - 5p^2/27}{\sqrt{1 - p^2/27}} - 1. \quad (3)$$

Oni klare rimarkas el (3), ke β havas horizontalan asimptoton $p = 3\sqrt{3}$.

Grafikaĵoj de r_3 malsamiĝas al tiuj de r_2 ĉar la ĝibo havas maksimumon. Tamen tiu maksimumo estas pli eta ol 1, do ne okazas alviolo. Ju pli granda p kompare kun $|l|$ des malpli kolinia la komenca foriĝo. Do la alruĝa kontribuo de foriĝa faktoro malfortiĝas komence, kaj la ĝibo pliiĝas.

Kurbo γ estas limo inter regionoj r_3 kaj r_4 , t.e., inter regiono de $D(\tau)$ pli eta ol 1 kaj regiono kie ĝi povas esti pli granda ol 1. Tiu kurbo malkovriĝas per forigo de τ el ekvacioj $D(l,p,\tau) = 1$ kaj $D'(l,p,\tau) = 0$; ĝi estas la parabolo $p = 2\sqrt{-2l}$.

Grafikaĵoj de r_4 malsamiĝas al tiuj de r_3 ĉar iliaj maksimumoj estas pli granda ol 1, t.e., poste komenca alruĝo estas alviolo. Tio okazas, ĉar la foriĝa movado komence estas sufiĉe ne kolinia, tiel kiel, post iom da tempo, alviola kontribuo de γ faktoro superas la alruĝa kontribuo de foriĝa faktoro. Tio estas senpere relativeca fenomeno, ĉar Newtonne nur alruĝo okazas ĉe foriĝa movado.

Grafikaĵoj de r_5 estas en limo inter r_4 kaj r_6 . Ili respondas al $l = 0$ do havas $D'(0) = 0$. Tio okazas ĉar komence ne estas proksimiĝo nek foriĝo. Tuj poste, alviola kontribuo de γ faktoro estras super alruĝa kontribuo de foriĝa faktoro. Laste la movado estas preskaŭ kolinia foriĝo, do

avermelhadora de dt_f/dt é menos forte. Porém, essa contribuição logo supera a violetante de γ quando o afastamento se torna quase colinear.

A curva β é o limite entre as regiões r_2 e r_3 , isto é, entre a região de $D'(\tau)$ sempre negativa e a região onde ela pode ser positiva. Essa curva se revela pela eliminação de τ das equações $D'(l,p,\tau) = 0$ e $D''(l,p,\tau) = 0$. Eis β :

Nota-se claramente na (3) que β tem assíntota horizontal $p = 3\sqrt{3}$.

Os gráficos de r_3 diferem dos de r_2 porque a corcova tem um máximo. Porém esse máximo é menor que 1, daí não ocorre violetamento. Quanto maior p comparativamente a $|l|$, tanto menos colinear o afastamento inicial. Assim, a contribuição avermelhante do fator de afastamento enfraquece inicialmente, e a corcova cresce.

A curva γ é o limite entre as regiões r_3 e r_4 , isto é, entre a região de $D(\tau)$ menor que 1 e a região onde ela pode ser maior que 1. Essa curva se revela mediante a eliminação de τ das equações $D(l,p,\tau) = 1$ e $D'(l,p,\tau) = 0$; ela é a parábola $p = 2\sqrt{-2l}$.

Os gráficos de r_4 diferem dos de r_3 porque seus máximos são maiores que 1, isto é, depois do avermelhamento inicial ocorre violetamento. Isso acontece porque o afastamento inicial é bastante não-colinear, de modo que, após algum tempo, a contribuição violetante de γ supera a contribuição avermelhante do fator de afastamento. Isso é um fenômeno puramente relativista, porque Newtonianamente somente avermelhamento acontece em afastamento.

Os gráficos de r_5 estão no limite entre r_4 e r_6 . Eles correspondem a $l = 0$, portanto têm $D'(0) = 0$. Isso ocorre porque inicialmente não há aproximação nem afastamento. Logo após, o violetamento de γ sobrepuja o avermelhamento do fator de afastamento. No final o movimento é afastamento quase colinear, e portanto a con-

alruĝa kontribuo de foriĝa faktoro estras.

Grafikaĵoj de r_6 respondas al $l > 0$. Komence estas proksimiĝo de observanto al fonto, do proksimiĝa faktoro dt_f/dt fortigas la alviolan kontribuon de γ . Laste la movado estas preskaŭ kolonia foriĝo, do la alruĝa kontribuo de foriĝa faktoro estras.

3 Detalo

Eblas pli detala analizo de regionoj r_4 , r_5 kaj r_6 el figuro 2. Fakte, figuro 3 montras subregionojn $\{r'_4, r''_4, r'''_4\}$, $\{r''_5, r'''_5\}$, $\{r''_6, r'''_6\}$, laŭ transfleksioj en grafikaĵoj estas super aŭ sub $D = 1$.

Kurboj δ_1 kaj δ_2 limigas tiujn subregionoj kaj rilatas al la unua kaj dua transfleksio, respektive. Ambaŭ kurboj malkovriĝas per forigo de τ el ekvacioj $D(l, p, \tau) = 1$ kaj $D''(l, p, \tau) = 0$. Uzante la parametron $m \in [1, \infty]$, jen ili:

$$l = \frac{m-1}{m+1} \left(1 - 2m \mp \sqrt{6 + 3m^2} \right),$$

kie la supera kaj subaj signaloj respondas respektive al δ_1 kaj al δ_2 . Oni montras, ke ambaŭ kurboj kuniĝas kun parabolo $p = 2\sqrt{-3l}$ ĉe $m \rightarrow \infty$.

4 Konkludo

Certe oni povas fari pli detalan matematikan analizon de grafikaĵoj de Dopplera faktoro kaj pridiskuti interpreton el ili. Ekzemple, akso $p = 0$ el regiono r_6 respondas al trapaso de fonto per observanto, farante malkontinuecon en Dopplera faktoro. Tiun aferon studas [7] kaj la plej grava rezulto estas en ties figuro 5.b, plej specife en la kvadranto kun $\tau > 0$. La malkontinueco okazas ĉar je la momento de trapaso, alviola Dopplera efiko de kolonia proksimiĝa movado subite fariĝas alruĝa

tribuiĉo avermelhante de dt_f/dt komanda.

Os gráfcicos de r_6 correspondem a $l > 0$. Inicialmente ocorre aproximação do observador à fonte, portanto o fator de aproximação dt_f/dt fortalece a contribuição violetante de γ . No final ocorre afastamento quase colinear, portanto a contribuição avermelhante de dt_f/dt comanda.

3 Detalhe

Uma análise mais detalhada é possível, das regiões r_4 , r_5 e r_6 da figura 2. De fato, a figura 3 mostra subregiões $\{r'_4, r''_4, r'''_4\}$, $\{r''_5, r'''_5\}$, $\{r''_6, r'''_6\}$, conforme os pontos de inflexão nos gráfcicos estiverem acima ou abaixo de $D = 1$.

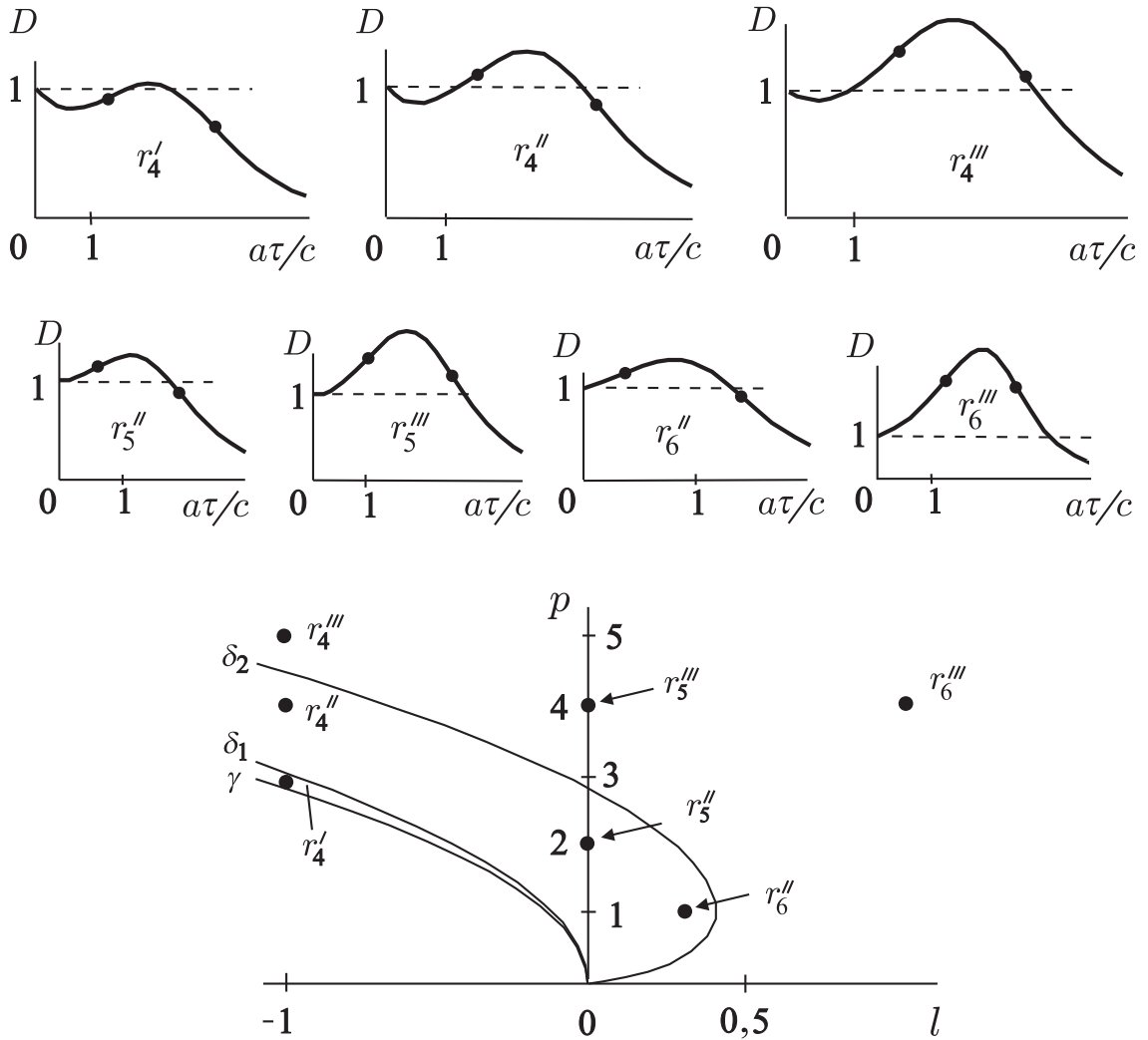
As curvas δ_1 e δ_2 delimitam essas subregiões e se relacionam ao primeiro e ao segundo ponto de inflexão, respectivamente. Ambas as curvas se revelam mediante a eliminação de τ das equações $D(l, p, \tau) = 1$ e $D''(l, p, \tau) = 0$. Usando-se o parâmetro $m \in [1, \infty]$, ei-las:

$$p = \frac{\sqrt{2(m-1)}}{m+1} \left(3m \pm \sqrt{6 + 3m^2} \right), \quad (4)$$

onde os sinais superiores e inferiores correspondem respectivamente a δ_1 e a δ_2 . Mostra-se que ambas as curvas se juntam com a parábola $p = 2\sqrt{-3l}$ em $m \rightarrow \infty$.

4 Conclusão

Certamente se pode fazer uma análise matemática mais detalhada dos gráfcicos do fator Doppler e discorrer sobre a interpretação deles. Por exemplo, o eixo $p = 0$ na região r_6 corresponde ao atropelamento da fonte pelo observador, fazendo descontinuidade no fator Doppler. Esse assunto foi estudado em [7] e o resultado mais importante está na figura 5.b dele, mais especificamente no quadrante com $\tau > 0$. A descontinuidade acontece porque no momento do atropelamento o violetamento devido à aproximação colinear subitamente se faz



Figuro 3: Plu detaloj pri regionoj r_4 , r_5 kaj r_6 el figuro 2. Super estas sep ecoj de grafikaĵo de Dopplera faktoro D kontraŭ $a\tau/c$, responde al ĉiu subregiono de la malsupra diagramo. Tiu diagramo montras sep subregionojn $\{r_4', r_4'', r_4''', r_5'', r_5''', r_6'', r_6'''\}$ laŭ valoroj de $l = aL/c^2$ kaj $p = aP/c^2$, kaj montras kurbojn γ , δ_1 kaj δ_2 , kiuj limigas tiujn subregionojn. Subregionoj r_5'' (havante $p < 2\sqrt{2}$) kaj r_5''' (kies $p > 2\sqrt{2}$) estas sur akso $l = 0$. Nigraj buloj (\bullet) en la diagramo montras la valorojn de l kaj p rilatajn al ĉiu grafikaĵo, kaj nigraj buletoj (\bullet) en la grafikaĵoj montras transfleksejojn.

Figura 3: Detalhes adicionais das regiões r_4 , r_5 e r_6 da figura 2. Mais acima estão sete tipos de gráfico do fator Doppler D contra $a\tau/c$, correspondendo a cada subregião do diagrama mais abaixo. Esse diagrama mostra sete subregiões $\{r_4', r_4'', r_4''', r_5'', r_5''', r_6'', r_6'''\}$ segundo os valores de $l = aL/c^2$ e $p = aP/c^2$, e mostra as curvas γ , δ_1 e δ_2 , que delimitam essas subregiões. As subregiões r_5'' (tendo $p < 2\sqrt{2}$) e r_5''' (cujo $p > 2\sqrt{2}$) estão sobre o eixo $l = 0$. Bolas negras (\bullet) no diagrama mostram os valores de l e p relacionados a cada gráfico, e bolinhas negras (\bullet) nos gráficos mostram pontos de inflexão.

Dopplera efiko de kolinia foriĝa movado.

Interesas rimarki, ke ĉi tiu studo taŭgas ankaŭ por komenca fazo de Dopplera efiko inter du akcelataj korpoj, t.e., kiam moviĝanta observanto ricevas signalon el fonto, kiu ankoraŭ ne moviĝas. Tiun problemon pridiskutas antaŭa artikolo [9]. En estonta artikolo ni uzas rezultojn de ĉi tiu nuna artikolo por pli detaligi rezultojn de [9].

avermelhamento devido ao afastamento colinear.

Interessa reparar que este estudo serve também para a fase inicial do efeito Doppler entre dois corpos acelerados, isto é, quando o observador em movimento recebe sinal da fonte ainda parada. Esse problema foi discutido em artigo anterior [9]. Em um futuro artigo nós usamos resultados deste atual artigo para detalhar mais uns resultados de [9].

Citaĵoj

Referências

- [1] C. Møller, *The theory of relativity*, 2nd ed., Oxford U P, 1972.
- [2] W. Rindler, *Essential relativity*, 2nd ed., Springer-Verlag, 1977.
- [3] J. Dwayne Hamilton, *The uniformly accelerated reference frame*, Am. J. Phys. **46** 83-9, 1978.
- [4] L. D. Landau, E. M. Lifshitz, *The classical theory of fields*, 4th rev. English ed., Butterworth-Heinemann, 1996.
- [5] W Cochran, *Some results on the relativistic Doppler effect for accelerated motion*, Am. J. Phys. **57** 1039-41, 1989.
- [6] F. M. Paiva kaj A. F. F. Teixeira, *La relativeca tempo – I*, Notas de Física, CBPF-NF-006/06, 2006 <http://arxiv.org/abs/physics/0603053>.
- [7] F. M. Paiva, A. F. F. Teixeira, *Relativeca Dopplera efiko ĉe unuforme akcelata movo – I*, Notas de Física, CBPF-NF-002/07, 2007 <http://arxiv.org/abs/physics/0701092>.
- [8] F. M. Paiva, A. F. F. Teixeira, *Relativeca Dopplera efiko ĉe unuforme akcelata movo – II*, Notas de Física, CBPF-NF-011/07, 2007 <http://arxiv.org/abs/0704.1130>.
- [9] F. M. Paiva, A. F. F. Teixeira, *Relativeca Dopplera efiko inter du akcelataj korpoj – I*, Notas de Física, CBPF-NF-001/08, 2008 <http://arxiv.org/abs/0801.2290>.